論　文

多空間上の確率分布に基づいたHMM

徳田　恵一[†]　益子　貴史[††]　宮崎　昇[††*]　小林　隆夫[††]

Multi-Space Probability Distribution HMM

Keiichi TOKUDA[†], Takashi MASUKO[††], Noboru MIYAZAKI[††*], and Takao KOBAYASHI[††]

あらまし　HMM（hidden Markov model）による時系列の統計的モデル化手法は，特に音声認識における音声スペクトル列の統計的モデル化手法として広く成功を収めている．HMMは，離散的なシンボル列を扱う離散分布HMMと，連続値をもったベクトル列を扱う連続分布HMMとに大別されるが，実際の観測系列には，離散的なシンボルと連続値が時間的に混在したものがあり，従来のHMMでこのような観測系列をそのまま取り扱うことはできない．音声のピッチパターンは，このような系列の例である．この問題を解決するため，本論文では，可変次元の多空間上における確率分布に基づいたHMMを新たに定義し，拡張されたHMMのモデルパラメータの再推定アルゴリズムを与えている．拡張されたHMMは，離散分布HMM，混合連続分布HMMを特別な場合として含み，更に離散シンボルと連続値が時間的に混在した観測系列をモデル化することができる．

キーワード　隠れマルコフモデル，テキスト音声合成，ピッチ，多空間確率分布

1. まえがき

HMM（hidden Markov model）による時系列の統計的モデル化手法は，様々な分野で広く用いられているが，特に音声認識の分野では，音声スペクトル列の統計的モデル化手法として大きな成功を収めている．HMMの枠組みは，統計モデルという点では単純な考え方であるが，非常に柔軟であり，例えば，コンテクスト依存モデル [1]，動的特徴 [2]，混合ガウス分布 [3]，tying手法（例えば [4]），話者/環境適応化手法（例えば [5]）などの導入により，HMMに基づく音声認識システムの性能を大きく改善してきた．

ところで，HMMは，離散的なシンボル列を扱う離散分布HMMと，連続値をもったベクトル列を扱う連続分布HMMとに大別されるが，実際の観測系列には，離散的なシンボルと連続値が時間的に混在したものがあり，従来のHMMでこのような観測系列をそのまま取り扱うことはできない．音声のピッチパターンは，このような系列の例である．つまり，音声のピッチパターンは，有声区間では1次元の連続値，無声区間では無声であること表す離散シンボルとして観測されるため，通常の音声認識などで用いられる離散分布HMMや連続分布HMMの枠組みを直接適用することはできない．これまでにも，ピッチパターンをHMM，あるいは統計モデルによりモデル化しようとする試みは行われているが，そこでは，(1) 無声区間のピッチとして分散の大きな乱数を与える [6]，(2) 無声区間のピッチの値を0として，混合分布によりモデル化する [7]，(3) 無声区間のピッチの値は存在するが観測できなかったとし（latent variableと考える），EMアルゴリズムを適用する [8]，などの便宜的な方法が用いられている．(3) は，統計モデルとしては，適切なものであるが，実際には存在しない無声区間のピッチを推定しようとする点に矛盾があり，また，臨界制動モデルのような強い制約をもったモデルのもとでなければ，適切なピッチの推定値を得ることはできない．(1)，(2) は，統計モデルとして便宜的なものとなっているため，コンテクストクラスタリング，話者/環境適応など，統計的枠組みに立脚した手法を理論的な整合性をもって導出することはできないという問題がある．

本論文では，離散シンボルと連続値が時間的に混在した観測系列をそのままHMMによりモデル化するこ

† 名古屋工業大学知能情報システム学科，名古屋市
Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya-shi, 466–8555 Japan
†† 東京工業大学大学院総合理工学研究科，横浜市
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Yokohama-shi, 226–8502 Japan
* 現在，NTTコミュニケーション科学基礎研究所

とが可能となれば，更に広い分野で HMM を有効に適用できるであろうとの考えから，可変次元の多空間上における確率分布に基づいた HMM を新たに定義し，拡張された HMM のモデルパラメータの再推定アルゴリズムを与えている．拡張された HMM は，離散分布 HMM，混合連続分布 HMM を特別な場合として含み，更に離散シンボルと連続値が時間的に混在した観測系列をモデル化することができる．

以下，**2.** で，本論文で考える多空間上の確率分布を定義した上で，それに基づいた HMM を **3.** において定義する．**4.** では，新たに定義した HMM のモデルパラメータ再推定式を導出するとともに，再推定の繰返しにより，ゆう度の局所的最大値を与えるモデルパラメータが得られることを証明する．**5.** において，従来の離散分布 HMM 及び連続分布 HMM との関係を整理し，**6.** で結論を述べる．

2. 多空間上の確率分布

G 個の空間 $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_G$ からなる標本空間 Ω を考える（図 1）．

$$\Omega = \bigcup_{g=1}^{G} \Omega_g \tag{1}$$

各空間 Ω_g は n_g 次元の実空間 R^{n_g} とする．G 個の空間はそれぞれ異なった次元 n_g をもつが，それらのうちのいくつかが同じ次元であってもよい．

各空間 Ω_g の確率を w_g とする．つまり，$P(\Omega_g) = w_g$，ただし，$\sum_{g=1}^{G} w_g = 1$ とする．更に，$n_g > 0$ のときには，各空間のもつ確率密度関数を $w_g \mathcal{N}_g(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x} \in R^{n_g}$ とする．ただし，$\int \mathcal{N}_g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$ とする．また，$n_g = 0$ のときには，空間 Ω_g は一つの標本点だけからなるとする．条件 $\sum_{g=1}^{G} w_g = 1$ 及び $\int \mathcal{N}_g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$ より，全標本空間の確率 $P(\Omega)$ は，$P(\Omega) = 1$ となる．

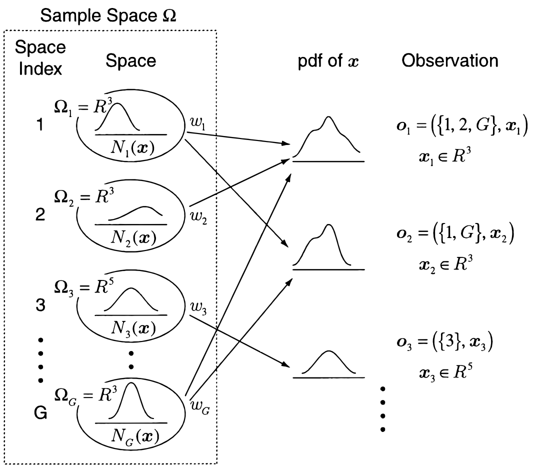


図 1　多空間上の確率分布と観測事象
Fig. 1　Multi-space probability distribution and observations.

以上の標本空間に対して，本文で考える観測事象は，空間インデックスの集合 X と，n 次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ からなる確率変数 $\boldsymbol{o}$ によって表される．すなわち

$$\boldsymbol{o} = (X, \boldsymbol{x}) \tag{2}$$

ただし，X に含まれる空間インデックスが表す空間は，すべて $\boldsymbol{x}$ と同じ n 次元とする．一方，X は，必ずしも，次元が等しい空間のインデックスすべてを同時に含んでいるわけではないことに注意する（例えば，図 1 の $\boldsymbol{o}_1$，$\boldsymbol{o}_2$）．観測ベクトル $\boldsymbol{x}$ だけでなく，空間インデックス集合 X も確率変数であり，いずれも何らかの観測装置（あるいは特徴抽出器）により，観測ごとに確定した値が与えられる．このとき，$\boldsymbol{o}$ の観測確率は，次式で定義することができる．

$$b(\boldsymbol{o}) = \sum_{g \in S(\boldsymbol{o})} w_g \mathcal{N}_g(V(\boldsymbol{o})) \tag{3}$$

ただし，

$$S(\boldsymbol{o}) = X, \quad V(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{x} \tag{4}$$

0 次元空間からの観測事象 $\boldsymbol{o}$ は，空間インデックスの集合 X だけからなり，$V(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{x}$ は存在しないことに注意する．つまり，式 (3) において，$n_g = 0$ のときは，$\mathcal{N}_g(\cdot)$ は存在しないが，ここでは記述の簡便性のため，$\mathcal{N}_g(\cdot) \equiv 1$，$n_g = 0$ と定義している．

図 1 の例では，観測事象 $\boldsymbol{o}_1$ は，空間インデックスの集合 $X_1 = \{1, 2, G\}$ と，3 次元のベクトル $\boldsymbol{x}_1 \in R^3$ により表される．したがって，観測値 $\boldsymbol{x}_1$ は，三つの 3 次元空間 Ω_1，Ω_2，Ω_G のいずれかから出力されたものであり，このとき確率変数 $\boldsymbol{x}$ の確率密度関数は $w_1 \mathcal{N}_1(\boldsymbol{x}) + w_2 \mathcal{N}_2(\boldsymbol{x}) + w_G \mathcal{N}_G(\boldsymbol{x})$ で与えられる．

以上で定義される確率分布は，$n_g \equiv 0$ のとき離散分布と等価となり，また，$n_g \equiv m > 0$，$S(\boldsymbol{o}) \equiv \{1, 2, \ldots, G\}$ のときには m 次元 G 混合の連続分布と等価となることから，離散分布及び連続混合分布を一般化したものであることがわかる．

このような確率分布が現実世界の確率現象に即したものであることを示すため，一つの例を挙げる：

池の中には，赤い魚，青い魚，亀がそれぞれ何匹かおり，加えていくつかのゴミがある．釣り人は，1回の試行（釣り）で，これらのいずれかを無作為に抽出する．魚を得た場合には，その縦横の長さ（水平方向及び鉛直方向の長さ）が計測され，亀を得た場合には，その甲羅の直径（甲羅は真円とする）が計測される．ゴミを得た場合には，その大きさは関心外であり，何も計測されない．

このとき，標本空間は以下の四つの空間からなる．

Ω_1：赤い魚の縦横の長さを表す2次元空間
Ω_2：青い魚の縦横の長さを表す2次元空間
Ω_3：亀の直径を表す1次元空間
Ω_4：ゴミを表す0次元空間

w_1，w_2，w_3，w_4 は，それぞれ，池の中にある赤い魚，青い魚，亀，ゴミの数の比率を表す．$\mathcal{N}_1(\cdot)$ は赤い魚の，$\mathcal{N}_2(\cdot)$ は青い魚の，それぞれ縦横の長さを表す2次元確率分布密度関数となる．また，$\mathcal{N}_3(\cdot)$ は，亀の直径を表す1次元確率分布密度関数である．例えば，赤い魚が得られたときの観測値は，その魚の縦横の長さを表す2次元ベクトルを $\boldsymbol{x}$ として，$\boldsymbol{o} = (\{1\}, \boldsymbol{x})$ となる．また，釣り人は昼夜を問わず釣りを続けており，夜になると長さは観測できるが色を判別することができないとすると，夜間における魚の観測値は，$\boldsymbol{o} = (\{1,2\}, \boldsymbol{x})$ となる．

3. 多空間上の確率分布に基づくHMM

前章で定義した多空間上の確率分布によって状態出力確率を与えることにより，新たなHMM λ を定義する．ここでは，このようなHMMを多空間上の確率分布に基づくHMM（multi-space probability distribution HMM: MSD-HMM）と呼ぶことにする．λ の状態数を N としたとき，λ は，初期状態確率 $\pi = \{\pi_i\}_{i=1}^N$，状態遷移確率 $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$，各状態 i での出力確率 $B = \{b_i(\cdot)\}_{i=1}^N$ からなる．ただし，

$$b_i(\boldsymbol{o}) = \sum_{g \in S(\boldsymbol{o})} w_{ig} \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o})) \tag{5}$$

したがって，各状態 i は，それぞれ G 個の分布（$\mathcal{N}_{i1}, \mathcal{N}_{i2}, \ldots, \mathcal{N}_{iG}$）と空間の重み（$w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{iG}$）（ただし，$\sum_{g=1}^G w_{ig} = 1$）をもつ（図2）．このとき，観測系列 $\boldsymbol{O} = (\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \ldots, \boldsymbol{o}_T)$ の出力確率は

$$P(\boldsymbol{O}|\lambda)$$

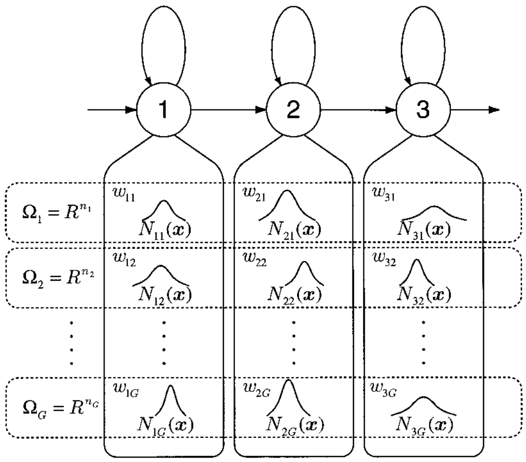


図2　多空間上の確率分布に基づくHMM
Fig. 2　An HMM based on multi-space probability distribution.

$$= \sum_{\text{all } \boldsymbol{q}} \prod_{t=1}^T a_{q_{t-1}q_t} b_{q_t}(\boldsymbol{o}_t)$$

$$= \sum_{\text{all } \boldsymbol{q}} \prod_{t=1}^T a_{q_{t-1}q_t} \sum_{g \in S(\boldsymbol{o}_t)} w_{q_t g} \mathcal{N}_{q_t g}(V(\boldsymbol{o}_t))$$

$$= \sum_{\text{all } \boldsymbol{q}} \left[\sum_{g \in S(\boldsymbol{o}_1)} a_{q_0 q_1} w_{q_1 g} \mathcal{N}_{q_1 g}(V(\boldsymbol{o}_1)) \right] \left[\sum_{g \in S(\boldsymbol{o}_2)} a_{q_1 q_2} w_{q_1 g} \mathcal{N}_{q_2 g}(V(\boldsymbol{o}_2)) \right] \cdots \left[\sum_{g \in S(\boldsymbol{o}_T)} a_{q_{T-1} q_T} w_{q_T g} \mathcal{N}_{q_T g}(V(\boldsymbol{o}_T)) \right]$$

$$= \sum_{\text{all } \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}} \prod_{t=1}^T a_{q_{t-1}q_t} w_{q_t l_t} \mathcal{N}_{q_t l_t}(V(\boldsymbol{o}_t)) \tag{6}$$

と書くことができる．ただし，$\boldsymbol{q} = \{q_1, q_2, \ldots, q_T\}$ を許される状態系列，$\boldsymbol{l} = \{l_1, l_2, \ldots, l_T\} \in \{S(\boldsymbol{o}_1) \times S(\boldsymbol{o}_2) \times \ldots \times S(\boldsymbol{o}_T)\}$ を観測系列 $\boldsymbol{O}$ に対して許される空間インデックスの系列としている．また，$a_{q_0 i} = \pi_i$ とする．

従来のHMMと同様，次式で定義される前向き変数 $\alpha_t(i)$，後向き変数 $\beta_t(i)$ を用いることにより，式(6)のゆう度の演算量を削減することができる．

$$\alpha_t(i) = P(\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \ldots, \boldsymbol{o}_t, q_t = i|\lambda) \tag{7}$$

$$\beta_t(i) = P(\boldsymbol{o}_{t+1}, \boldsymbol{o}_{t+2}, \ldots, \boldsymbol{o}_T | q_t = i, \lambda) \tag{8}$$

$\alpha_t(i)$，$\beta_t(i)$ は，それぞれ，以下の手順で再帰的に計算される．

（1） 初期化：

$$\begin{aligned} &\alpha_1(i) = \pi_i b_i(\boldsymbol{o}_1), \quad 1 \leqq i \leqq N \\ &\beta_T(i) = 1, \qquad\qquad 1 \leqq i \leqq N \end{aligned} \tag{9}$$

（2） 再帰：

$$\alpha_{t+1}(i) = \left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j) a_{ji} \right] b_i(\boldsymbol{o}_{t+1}),$$
$$1 \leqq i \leqq N, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{10}$$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(\boldsymbol{o}_{t+1}) \beta_{t+1}(j),$$
$$1 \leqq i \leqq N, \quad t = T-1, 2, \ldots, 1 \tag{11}$$

式 (6) の値は，これら α または β の終端の値の和によって与えられる．つまり，

$$P(\boldsymbol{O}|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i) = \sum_{i=1}^{N} a_{q_0 i} b_i(\boldsymbol{o}_1) \beta_1(i) \tag{12}$$

前向き変数 $\alpha_t(i)$，後ろ向き変数 $\beta_t(i)$ は，次節で導出する再推定式を計算するため（具体的には式 (15), (16) の計算）にも用いられる．

4. モデルパラメータの再推定アルゴリズム

本章では，観測系列 $\boldsymbol{O}$ が与えられたときに式 (6) で与えられる観測ゆう度 $P(\boldsymbol{O}|\lambda)$ を最大にするようなモデルパラメータ λ を求める手法を，文献 [3], [10] の手順にならって導出する．

4.1 Q 関 数

観測系列 $\boldsymbol{O}$ に対して，$P(\boldsymbol{O}|\lambda)$ の局所的最大値を与える λ を求める式を導出するため，現在のモデル λ' と，変数 λ を引数とする補助関数 $\mathcal{Q}(\lambda', \lambda)$ を定義する．

$$\mathcal{Q}(\lambda', \lambda) = \sum_{\text{all } \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l} | \lambda') \log P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l} | \lambda) \tag{13}$$

以下，$\mathcal{Q}$ 関数に関する三つの定理を用いて $P(\boldsymbol{O}|\lambda)$ の局所的臨界点となる λ を求める手法を導出する．ここでは，$\mathcal{N}_{ig}(\cdot)$，$n_g > 0$ を平均 $\boldsymbol{\mu}_{ig}$，共分散 $\boldsymbol{\Sigma}_{ig}$ をもった n_g 次元ガウス分布とする．なお，文献 [10] の手順にならえば，$\mathcal{N}_{ig}(\cdot)$ をコルモゴロフの consistency 条件を満たす楕円対称分布密度関数へ拡張することは容易である．

［定理 1］

$$\mathcal{Q}(\lambda', \lambda) \geqq \mathcal{Q}(\lambda', \lambda') \rightarrow P(\boldsymbol{O}, \lambda) \geqq P(\boldsymbol{O}, \lambda') \tag{14}$$

［定理 2］ すべての状態 i のすべての空間 Ω_g それぞれについて，$n_g + 1$ 個の観測事象 $\boldsymbol{o}_t$ があり（つまり，(i, g) の各組合せに対して，式 (15) で定義される $\gamma_t(i, g)$ が $\gamma_t(i, g) > 0$ となる $\boldsymbol{o}_t$ が，少なくとも $n_g + 1$ 個あり），その $n_g + 1$ 個の $\boldsymbol{o}_t$ は以下の条件を満たすとする．

$n_g + 1$ 個の $V(\boldsymbol{o}_t)$ のうち，任意の n_g 個が線形独立（linearly independent）である．

このとき $\mathcal{Q}(\lambda', \lambda)$ は λ に関して唯一の大局的最大値をとり，この最大点が唯一の臨界点（critical point）となる．

［定理 3］ λ が再推定により変化しない場合に限り，λ は $P(\boldsymbol{O}|\lambda)$ の臨界点となる．

定理 1，3 は通常の HMM の場合と同様にして証明できる．本手法においては，通常の HMM と状態出力確率が異なるため，Q 関数の大局的最大点が存在するかどうかを新たに調べる必要があり，定理 2 は，その結果を示している．定理 2 の証明は付録に示す．

ここで $\mathcal{Q}(\lambda', \lambda)$ を最大にする λ を，λ' からの再推定と定義する．本節の三つの定理により，λ を λ' に代入して再推定を繰り返していけば，λ がゆう度関数の臨界点に達するまでは $P(\boldsymbol{O}|\lambda)$ は単調に増加する．したがって，λ の再推定を繰り返すことによりゆう度関数 $P(\boldsymbol{O}|\lambda)$ の局所的臨界点が得られる．

4.2 Q 関数の最大化

本節では，観測系列 $\boldsymbol{O}$ とモデル λ' に対し，$\mathcal{Q}(\lambda', \lambda)$ を最大にする λ の各パラメータを導出する．

はじめに，観測系列 $\boldsymbol{O}$ とモデル λ が与えられたときに，時刻 t で状態 i に存在し，$V(\boldsymbol{o}_t)$ が空間 h から出力される確率 $\gamma_t(i, h)$ を定義する．

$$\begin{aligned} &\gamma_t(i, h) \\ &\quad = P(q_t = i, l_t = h | \boldsymbol{O}, \lambda) \\ &\quad = P(q_t = i | \boldsymbol{O}, \lambda) P(l_t = h | q_t = i, \boldsymbol{O}, \lambda) \end{aligned}$$

$$= \frac{P(q_t = i, \boldsymbol{O}|\lambda)}{P(\boldsymbol{O}|\lambda)} P(l_t = h|q_t = i, \boldsymbol{O}, \lambda)$$
$$= \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)\beta_t(j)} \cdot \frac{w_{ih}\mathcal{N}_{ih}(V(\boldsymbol{o}_t))}{\sum_{g \in S(\boldsymbol{o}_t)} w_{ig}\mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t))} \tag{15}$$

また，観測系列 $\boldsymbol{O}$ とモデル λ が与えられたときに，時刻 $t+1$ において状態 i から j に遷移する確率 $\xi_t(i,j)$ を定義する．

$$\xi_t(i,j) = P(q_t = i, q_{t+1} = j|\boldsymbol{O}, \lambda)$$
$$= \frac{P(q_t = i, q_{t+1} = j, \boldsymbol{O}|\lambda)}{P(\boldsymbol{O}|\lambda)}$$
$$= \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(\boldsymbol{o}_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \alpha_t(m)a_{mk}b_k(\boldsymbol{o}_{t+1})\beta_{t+1}(k)} \tag{16}$$

更に，観測事象 $\boldsymbol{o}_t$ の空間インデックス集合が空間インデックス g を含むような時刻 t の集合 $T(\boldsymbol{O}, g)$ を定義する．

$$T(\boldsymbol{O}, g) = \{t|g \in S(\boldsymbol{o}_t)\} \tag{17}$$

この記法を導入することにより，以下の式操作は，従来の混合連続 HMM の場合に類似した形式で進めることができる．

さて，観測系列 $\boldsymbol{O}$ と状態系列 $\boldsymbol{q}$，空間系列 $\boldsymbol{l}$ に対する対数ゆう度は，式 (6) から以下のように与えられる．

$$\log P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda)$$
$$= \sum_{t=1}^{T}\{\log a_{q_{t-1}q_t} + \log w_{q_t l_t} + \log \mathcal{N}_{q_t l_t}(V(\boldsymbol{o}_t))\} \tag{18}$$

式 (18) を用いて $\mathcal{Q}$ 関数 (13) は以下のようになる．

$$\mathcal{Q}(\lambda', \lambda)$$
$$= \sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \log a_{q_0 q_1}$$
$$+ \sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \sum_{t=1}^{T-1} \log a_{q_t q_{t+1}}$$
$$+ \sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \sum_{t=1}^{T} \log w_{q_t l_t}$$
$$+ \sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \sum_{t=1}^{T} \log \mathcal{N}_{q_t l_t}(V(\boldsymbol{o}_t)) \tag{19}$$

式 (19) 第 1 項は，$a_{q_0 q_1}$ つまり π_{q_1} に関する項であり，

$$\sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \log a_{q_0 q_1}$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\text{all } \boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, q_1 = i, \boldsymbol{l}|\lambda') \log a_{q_0 i}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} P(\boldsymbol{O}, q_1 = i|\lambda') \log \pi_i \tag{20}$$

式 (19) 第 2 項は，a_{ij} に関する項であり，

$$\sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \sum_{t=1}^{T-1} \log a_{q_t q_{t+1}}$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{\text{all } \boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j, \boldsymbol{l}|\lambda') \cdot \log a_{ij}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j|\lambda') \log a_{ij} \tag{21}$$

式 (19) 第 3 項は，w_{ig} に関する項であり，

$$\sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \sum_{t=1}^{T} \log w_{q_t l_t}$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{g \in S(\boldsymbol{o}_t)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \log w_{ig}$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{g=1}^{G}\sum_{t \in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \log w_{ig} \tag{22}$$

式 (19) 第 4 項は，$\mathcal{N}_{ig}(\cdot)$ に関する項であり，

$$\sum_{\text{all } \boldsymbol{q},\boldsymbol{l}} P(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{l}|\lambda') \sum_{t=1}^{T} \log \mathcal{N}_{q_t l_t}(V(\boldsymbol{o}_t))$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{g \in S(\boldsymbol{o}_t)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda')$$

$$\cdot \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t))$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{g=1}^{G}\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t)) \tag{23}$$

と，それぞれ書くことができる．式 (20)，(21)，(22) はすべて，$\sum_{i=1}^{N} u_i \log y_i$ の形をしており，これは Lagurange の未定乗数法により，$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, y_i \geqq 0$ の制約下で次の唯一の最大点に至る．

$$y_i = \frac{u_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} u_j} \tag{24}$$

したがって，式 (20)，(21)，(22) をそれぞれ最大にする π_i，a_{ij}，w_{ig} は以下のように定められる．

$$\pi_i = \frac{P(\boldsymbol{O}, q_1 = i|\lambda')}{\sum_{j=1}^{N} P(\boldsymbol{O}, q_1 = j|\lambda')} = \frac{P(\boldsymbol{O}, q_1 = i|\lambda')}{P(\boldsymbol{O}|\lambda')}$$
$$= P(q_1 = i|\boldsymbol{O}, \lambda')$$
$$= \sum_{g\in S(\boldsymbol{o}_1)} \gamma'_1(i, g) \tag{25}$$

$$a_{ij} = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j|\lambda')}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = k|\lambda')}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j|\lambda')}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i|\lambda')}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1} P(q_t = i, q_{t+1} = j|\boldsymbol{O}, \lambda')}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1} P(q_t = i|\boldsymbol{O}, \lambda')}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1} \xi'_t(i, j)}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{g\in S(\boldsymbol{o}_t)} \gamma'_t(i, g)} \tag{26}$$

$$w_{ig} = \frac{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda')}{\displaystyle\sum_{h=1}^{G}\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},h)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = h|\lambda')}$$
$$= \frac{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} \gamma'_t(i, g)}{\displaystyle\sum_{h=1}^{G}\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},h)} \gamma'_t(i, h)} \tag{27}$$

式 (23) は，$\mathcal{N}_{ig}(\cdot)$，$n_g > 0$ を平均 $\boldsymbol{\mu}_{ig}$，共分散 $\boldsymbol{\Sigma}_{ig}$ をもった n_g 次元ガウス分布とすれば，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{ig}} \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t)) = \boldsymbol{0} \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{ig}^{-1}} \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t)) = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

を満たす $\boldsymbol{\mu}_{ig}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{ig}$ を求めることにより最大化される．このような $\boldsymbol{\mu}_{ig}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{ig}$ は，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{ig}} \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t))$$
$$= \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}_{ig}} \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t))$$
$$= \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{ig}^{-1}(V(\boldsymbol{o}_t) - \boldsymbol{\mu}_{ig})$$
$$= \boldsymbol{0} \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{ig}^{-1}} \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t))$$
$$= \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{ig}^{-1}} \log \mathcal{N}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t))$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda')$$

$$\cdot\left(\boldsymbol{\Sigma}_{ig}-(V(\boldsymbol{o}_t)-\boldsymbol{\mu}_{ig})(V(\boldsymbol{o}_t)-\boldsymbol{\mu}_{ig})^T\right)$$
$$=\mathbf{0} \tag{31}$$

より，

$$\boldsymbol{\mu}_{ig}=\frac{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O},q_t=i,l_t=g|\lambda')V(\boldsymbol{o}_t)}{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O},q_t=i,l_t=g|\lambda')}$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} \gamma'_t(i,g)V(\boldsymbol{o}_t)}{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} \gamma'_t(i,g)},\quad n_g>0 \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ig}=\frac{\left(\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O},q_t=i,l_t=g|\lambda')\,(V(\boldsymbol{o}_t)-\boldsymbol{\mu}_{ig})(V(\boldsymbol{o}_t)-\boldsymbol{\mu}_{ig})^T\right)}{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O},q_t=i,l_t=g|\lambda')}$$
$$=\frac{\left(\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} \gamma'_t(i,g)\,(V(\boldsymbol{o}_t)-\boldsymbol{\mu}_{ig})(V(\boldsymbol{o}_t)-\boldsymbol{\mu}_{ig})^T\right)}{\displaystyle\sum_{t\in T(\boldsymbol{O},g)} \gamma'_t(i,g)},$$
$$n_g>0 \tag{33}$$

で与えられる．定理 2 の条件より，$\boldsymbol{\Sigma}_{ig}$ は正定となる．

4. 1 より，$\mathcal{Q}(\lambda',\lambda)$ を最大にする λ を式 (25)〜(27)，(32)，(33) により求め，$\mathcal{Q}(\lambda',\lambda)$ の λ' に再帰的に代入することにより，$P(\boldsymbol{O}|\lambda)$ の局所的最大値を与える λ が得られる．

5. 考 察

5. 1 離散分布 HMM，連続分布 HMM との関係

多空間上の確率分布は，離散分布分布と混合連続分布を特別な場合として含むため，新たに拡張された HMM は，離散分布 HMM と混合連続分布 HMM を特別な場合として含むものである．すべての空間の次元が 0 で（$n_g\equiv 0$），すべての観測事象 $\boldsymbol{o}_t$ に対して $S(\boldsymbol{o}_t)$ がただ一つの要素（空間）をもつとき（$|S(\boldsymbol{o}_t)|\equiv 1$），離散分布 HMM と等価になる．$S(\boldsymbol{o}_t)$ が複数の要素をもつとき（$|S(\boldsymbol{o}_t)|>1$）には，拡張された HMM は，マルチラベリングに基づいた離散 HMM [11] に等価となる．また，すべての空間の次元が等しく（$n_g\equiv m$），すべての観測事象 $\boldsymbol{o}_t$ に対して $S(\boldsymbol{o}_t)$ がすべての空間を示すとき（$S(\boldsymbol{o}_t)\equiv\{1,2,\ldots,G\}$），混合連続分布 HMM と等価になる．このことは，$n_g\equiv 0$，$|S(\boldsymbol{o}_t)|\equiv 1$ のとき，式 (25)〜(27) が，コードブックサイズ G の離散分布 HMM の再推定式に，また，$n_g\equiv m$，$S(\boldsymbol{o}_t)\equiv\{1,2,\ldots,G\}$ のときに，式 (25)〜(27)，(32)，(33) が，m 次元 G 混合連続分布 HMM の再推定式に等しくなることからも確かめることができる．すなわち，多空間上の確率分布に基づく HMM は，離散分布 HMM と連続分布 HMM を包含し，更に，観測時刻ごとに異なる次元の $\boldsymbol{x}$（0 次元，つまり離散シンボルのみの場合も含む）が観測される場合に対応することができる．

なお，多空間上の確率分布に基づく HMM（MSD-HMM）と関連のある手法として，上記以外に，文献 [9] の multi-channel HMM を挙げることができる．Multi-channel HMM は，本手法と類似した形式をもつが，すべてのチャネル（各チャネルは離散分布をもつ）が観測されることを前提としており，「観測されない」を理論的な整合性をもって取り扱うことはできない．逆に，文献 [9] において最終的に導出されたモデルは，以下の条件

- Multi-channel HMM の M 個のチャネルのすべてのシンボルに 1 対 1 対応させて，0 次元空間を用意する．
- 観測は，M 個の空間インデックスからなり，それぞれ第 1〜第 M チャネルに対応した空間から一つずつ選ばれるとする．

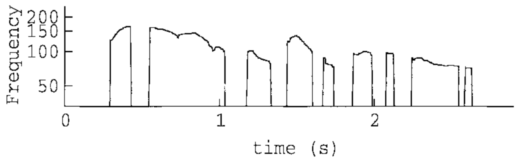
のもとで，MSD-HMM の特別な場合となる．

5. 2 ピッチパターンのモデル化への適用

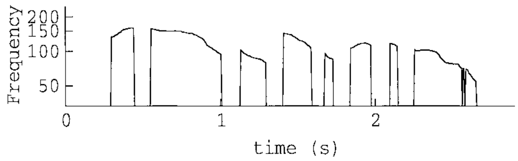
音声のピッチの値は，有声区間においては連続値をとり，無声区間においては値が存在しない．このような観測系列は，1 次元空間における 1 次元確率分布からピッチの値が出力され，**2.** において定義した 0 次元の空間が無声であるという事象に対応すると考えることにより，多空間分布によりモデル化することができる．つまり，**2.** において $n_g=1$ $(g=1,2,\ldots,G-1)$，$n_G=0$ とし，

$$S(\boldsymbol{o}_t)=\begin{cases}\{1,2,\ldots,G-1\}, & (\text{有声})\\ \{G\}, & (\text{無声})\end{cases} \tag{34}$$

としたとき，これらの空間上の確率分布に基づく HMM



(a) natural pitch



(b) generated pitch

図 3　ピッチパターンの生成例「平均倍率を下げた形跡がある」
Fig. 3　Generated pitch pattern for a sentence "heikiNbairitsuwo sageta keisekiga aru."

は無声区間を含むピッチパターンを観測系列として直接扱うことができる．このとき，有声区間のピッチの値は $G-1$ 混合の連続分布によりモデル化されることになる．

文献 [12] において，実音声から抽出されたピッチパターンを用いた学習を行ったが，その際，再推定の繰返しが，**4.** の定理のとおり，学習データに対するゆう度を単調に増加させることを確かめている．また，学習した音素 HMM から，パラメータ生成アルゴリズム [13] を用いて生成したピッチパターンを図 3 に示す(注 1)．図より，自然発声から抽出したピッチパターンをよく近似したパターンを得ることができていることがわかる．

実世界の様々な時系列現象は，必ずしも，離散シンボルのみ，あるいは次元が一定の連続値ベクトルのみ，という形で観測されるわけではない．したがって，本手法は，ピッチのモデル化のみならず，離散シンボルあるいは次元の異なる連続値として観測される様々な時系列の確率モデルとして役立つことが期待される．このような分野として，例えば，人間の行動予測，経済予測などを挙げることができる．また，提案手法の枠組みは，便宜的な仮定や近似を一切含まないため，従来の HMM において開発されてきた統計的枠組みに立脚した各手法を，理論的整合性をもって拡張，導入することができるという利点をもつ．実際に図 3 の例では，MSD-HMM の学習の際に，MDL 基準によるコンテクストクラスタリング手法を導出し，用いているが，このようなことが可能であるのは，本手法が便宜的な仮定や近似を含まない統計モデルに基づいていることによる．

(注 1)：詳細な実験条件などは，[14] を参照のこと．

6. む す び

可変次元の多空間上の確率分布に基づいた HMM を定義し，観測系列に対してゆう度の局所的最大値をとるモデルパラメータを求める再推定アルゴリズムを導出した．本手法は，離散シンボルと連続値が時間的に混在する観測系列のモデル化手法として，多くの応用が考えられる．音声のピッチパターンはその例であり，提案した HMM において，有声区間を 1 次元空間（複数の 1 次元空間でもよい）からの出力，無声区間を 0 次元空間からの出力と考えることにより，ピッチパターンを直接モデル化することが可能となった．

提案手法により，音声のスペクトル（パワーを含む）[15]，継続長 [16]，ピッチパターン [12] を同時に HMM の枠組みでモデル化した音声合成システムの構築が可能となるが [14]，このようなシステムの実現については稿を改めて報告したい．また，スペクトルとピッチの同時モデル化は，音声認識システムの性能改善にも有用であることが期待される．

謝辞　本研究の一部は文部省科学研究費補助金（基盤研究 B（2）課題番号 10555125),（財）中部電力基礎技術研究所研究助成金によった．実験に協力頂いた名工大博士後期課程吉村貴克氏に感謝します．

文　　献

[1] S. Schwartz, Y. Chow, O. Kimball, S. Roucos, M. Krasner, and J. Makhoul, "Context-dependent modeling for acoustic-phonetic recognition of continuous speech," Proc. ICASSP85, pp.1205–1208, March 1985.

[2] S. Furui, "Speaker independent isolated word recognition using dynamic features of speech spectrum," IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., vol.34, no.1, pp.52–59, Feb. 1986.

[3] B.-H. Juang, "Maximum-likelihood estimation for mixture multivariate stachastic observations of Markov chains," AT&T Technical J., vol.64, no.6, pp.1235–1249, July 1985.

[4] J.J. Odell, The use of context in large vocabulary speech recognition, Ph.D. Dissertation, Cambridge University, March 1995.

[5] C.-H. Lee, C.-H. Lin, and B.-H. Juang, "A study on speaker adaptation of the parameters of continuous density hidden Markov models," IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process., vol.39, no.4,

pp.806–814, April 1991.

[6] G.J. Freij and F. Fallside, "Lexical stress recognition using hidden Markov models," Proc. ICASSP88, pp.135–138, April 1988.

[7] U. Jensen, R.K. Moore, P. Dalsgaard, and B. Lindberg, "Modelling intonation contours at the phrase level using continuous density hidden Markov models," Computer Speech and Language, vol.8, no.3, pp.247–260, July 1994.

[8] K. Ross and M. Ostendorf, "A dynamical system model for generating F_0 for synthesis," Proc. ESCA/IEEE Workshop on Speech Synthesis, pp.131–134, Sept. 1994.

[9] D. Xu, C. Fancourt, and C. Wang, "Multi-channel HMM," Proc. ICASSP, pp.841–844, 1996.

[10] L.A. Liporace, "Maximum likelihood estimation for multivariate observations of Markov sources," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-28, no.5, pp.729–734, Sept. 1982.

[11] M. Nishimura and K. Toshioka, "HMM-based speech recognition using multi-dimensional multi-labeling," Proc. ICASSP87, pp.1163–1166, 1987.

[12] 宮崎　昇，徳田恵一，益子貴史，小林隆夫，"多空間上の確率分布に基づいた HMM によるピッチパタン生成の検討," 信学技報，SP98-12, April 1998.

[13] 徳田恵一，益子貴史，小林隆夫，今井　聖，"動的特徴を用いた HMM からの音声パラメータ生成アルゴリズム," 音響誌，vol.53, no.3, pp.192–200, March 1997.

[14] 吉村貴克，徳田恵一，益子貴史，小林隆夫，北村　正，"HMM に基づく音声合成におけるスペクトル・ピッチ・状態継続長の同時モデル化," 信学技報，SP99-59, Aug. 1999.

[15] 益子貴史，徳田恵一，小林隆夫，今井　聖，"動的特徴を用いた HMM に基づく音声合成," 信学論（D-II），vol.J79-D-II, no.12, pp.2184–2190, Dec. 1996.

[16] 吉村貴克，徳田恵一，益子貴史，小林隆夫，北村　正，"HMM に基づく音声合成システムのための状態継続長モデルの構築," 信学技報，SP98-64/DSP98-85, Sept. 1998.

付　　録

臨界点において Q 関数が唯一の大局的最大値をとる証明

証明は以下の三つの部分に分かれる．

（１） Q 関数のパラメータ空間におけるあらゆる方向への 2 階微分が，臨界点においては負である．すなわち臨界点は極となっている．

（２） λ がパラメータ空間の境界または無限遠に近づいたときに $\mathcal{Q}(\lambda', \lambda) \to -\infty$ となる．すなわち大局的最大値は極大点である．

（３） 臨界点は一つである．

（証明）

(1) **4.2** より，$\mathcal{Q}$ 関数は以下の形で表される．

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(\lambda', \lambda) \\
&= \sum_{i=1}^{N} P(\boldsymbol{O}, q_1 = i|\lambda') \log \pi_i \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j|\lambda') \log a_{ij} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \sum_{g=1}^{G} \sum_{t \in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda') \\
&\quad \cdot \Biggl(\log w_{ig} - \frac{n_g}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log |\boldsymbol{C}_{ig}| \\
&\quad - \frac{1}{2} (V(\boldsymbol{o}_t) - \boldsymbol{\mu}_{ig})^T \boldsymbol{C}_{ig} (V(\boldsymbol{o}_t) - \boldsymbol{\mu}_{ig}) \Biggr)
\end{aligned}
\tag{A·1}
$$

ただし，$\boldsymbol{C}_{ig} = \boldsymbol{\Sigma}_{ig}^{-1}$ とする．$\boldsymbol{\Sigma}_{ig}$ が式 (33) により計算されているとすれば，定理の観測事象 $\boldsymbol{o}_t$ に関する条件より，$\boldsymbol{\Sigma}_{ig}$ 及び $\boldsymbol{\Sigma}_{ig}^{-1}$ は正定行列となることに注意する．

ここで $0 \leqq \theta \leqq 1$ なる θ を用いて λ を二つの点の結合により $\lambda = \theta\lambda^{(1)} + (1-\theta)\lambda^{(2)}$ と表す．すなわち

$$\pi_i = \theta\pi_i^{(1)} + (1-\theta)\pi_i^{(2)} \tag{A·2}$$

$$a_{ij} = \theta a_{ij}^{(1)} + (1-\theta) a_{ij}^{(2)} \tag{A·3}$$

$$w_{ig} = \theta w_{ig}^{(1)} + (1-\theta) w_{ig}^{(2)} \tag{A·4}$$

$$\boldsymbol{C}_{ig} = \theta \boldsymbol{C}_{ig}^{(1)} + (1-\theta) \boldsymbol{C}_{ig}^{(2)} \tag{A·5}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ig} = \theta \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(1)} + (1-\theta) \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(2)} \tag{A·6}$$

これらを式 (A·1) に代入して θ に関する 2 階の偏微分を行うと，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \theta^2} \\
&= \sum_{i=1}^{N} P(\boldsymbol{O}, q_1 = i|\lambda') \frac{-(\pi_i^{(1)} - \pi_i^{(2)})^2}{(\theta\pi_i^{(1)} + (1-\theta)\pi_i^{(2)})^2} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{N} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j|\lambda') \\
&\quad \cdot \frac{-(a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)})^2}{(\theta a_{ij}^{(1)} + (1-\theta) a_{ij}^{(2)})^2} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \sum_{g=1}^{G} \sum_{t \in T(\boldsymbol{O},g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g|\lambda')
\end{aligned}
$$

$$
\cdot \left(\frac{-(w_{ig}^{(1)} - w_{ig}^{(2)})^2}{(\theta w_{ig}^{(1)} + (1-\theta) w_{ig}^{(2)})^2} \right.
$$

$$
+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_g} \frac{-(x_{igk}^{(1)} - x_{igk}^{(2)})^2}{(\theta x_{igk}^{(1)} + (1-\theta) x_{igk}^{(2)})^2}
$$

$$
- (\boldsymbol{\mu}_{ig}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(2)})^T
$$

$$
\cdot \left(\theta \boldsymbol{C}_{ig}^{(1)} + (1-\theta) \boldsymbol{C}_{ig}^{(2)} \right) (\boldsymbol{\mu}_{ig}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(2)})
$$

$$
+ 2(\boldsymbol{\mu}_{ig}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(2)})^T (\boldsymbol{C}_{ig}^{(1)} - \boldsymbol{C}_{ig}^{(2)})
$$

$$
\left. \cdot [V(\boldsymbol{o}_t) - (\theta \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(1)} + (1-\theta) \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(2)})] \right) \qquad (\text{A·7})
$$

ただし，$x_{igk}^{(1)}$ 及び $x_{igk}^{(2)}$ は，$\boldsymbol{U}_{ig} \boldsymbol{C}_{ig} \boldsymbol{U}_{ig}^{-1}$ の対角成分 x_{igk} に対して $x_{igk} = \theta x_{igk}^{(1)} + (1-\theta) x_{igk}^{(2)}$ を満たすものであり，$\boldsymbol{U}_{ig}$ は $\boldsymbol{C}_{ig}$ を対角化する直交行列である．

臨界点においては

$$
\left. \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \boldsymbol{\mu}_{ig}} \right|_{\boldsymbol{\mu}_{ig} = \theta \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(1)} + (1-\theta) \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(2)}}
$$

$$
= (\theta \boldsymbol{C}_{ig}^{(1)} + (1-\theta) \boldsymbol{C}_{ig}^{(2)})
$$

$$
\cdot \left(\sum_{t \in T(\boldsymbol{O}, g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g | \lambda') \right.
$$

$$
\left. \cdot \left(V(\boldsymbol{o}_t) - (\theta \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(1)} + (1-\theta) \boldsymbol{\mu}_{ig}^{(2)}) \right) \right)
$$

$$
= \boldsymbol{0} \qquad (\text{A·8})
$$

が成立するので，式 (A·7) において [ ] で囲まれた部分に関する項が 0 となる．式 (A·7) の前半部分は明らかにすべて負となるので，臨界点において $\lambda^{(1)}$，$\lambda^{(2)}$ に関係なく，あらゆる方向について

$$
\frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \theta^2} \leqq 0 \qquad (\text{A·9})
$$

が成立する．

(2)　$Q(\lambda', \lambda)$ は以下の形でも表される．

$$
\mathcal{Q}(\lambda', \lambda)
$$

$$
= \sum_{i=1}^{N} P(\boldsymbol{O}, q_1 = i | \lambda') \log \pi_i
$$

$$
+ \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j | \lambda') \log a_{ij}
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{g=1}^{G} \sum_{t \in T(\boldsymbol{O}, g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g | \lambda')
$$

$$
\cdot \left(\log w_{ig} - \frac{n_g}{2} \log(2\pi) \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_g} \log y_{igs} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_g} y_{igs} z_{tigs}^2 \right) \qquad (\text{A·10})
$$

y_{igs} は $\boldsymbol{C}_{ig}$ の固有値である．また，$z_{tigs} = (V(\boldsymbol{o}_t) - \boldsymbol{\mu}_{ig})^T \boldsymbol{e}_{igs}$ であり，$\boldsymbol{e}_{igs}, s = 1, 2, \ldots, n_g$ は $\boldsymbol{C}_{ig}$ の固有ベクトルからなり，正規直交系をつくる．

ここで，λ のパラメータが無限遠若しくはパラメータ空間の境界に近づいたとすると，少なくとも以下のどれかが成立する．

（1）　$\pi_i \to 0$
（2）　$a_{ij} \to 0$
（3）　$z_{tigs}^2 \to \infty$
（4）　$w_{ig} \to 0$
（5）　$y_{igs} \to 0$
（6）　$y_{igs} \to \infty$

条件（1）から（5）のうちのどれかが成り立つ場合には，式 (A·10) のうち少なくとも一つの項は $-\infty$ となるので $Q(\lambda', \lambda) \to -\infty$ は明らかである．$y_{igs} \to \infty$ の場合は観測事象 $\boldsymbol{o}_t$ に関する仮定から，ある t において z_{tigs}^2 が必ず非零の正の値をとる．したがって

$$
\log y_{igs} - z_{tigs}^2 y_{igs} \to -\infty \qquad (\text{A·11})
$$

が成り立ち，無限遠若しくはパラメータ空間の境界においては，$Q(\lambda', \lambda)$ は $-\infty$ となる．

(3)　証明 (1) より，もし臨界点が複数あるならば，それらは離れている．ここで $\boldsymbol{C}_{ig} = \boldsymbol{\tau}_{ig}^T \boldsymbol{\tau}_{ig}$ とする．$\boldsymbol{\tau}_{ig}$ は三角行列で，固有値はすべて正とする．$\boldsymbol{\tau}_{ig}$ を用いると，式 (A·1) は

$$
\mathcal{Q}(\lambda', \lambda)
$$

$$
= \sum_{i=1}^{N} P(\boldsymbol{O}, q_1 = i | \lambda') \log \pi_i
$$

$$
+ \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, q_{t+1} = j | \lambda') \log a_{ij}
$$

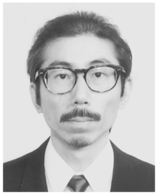
$$
+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{g=1}^{G} \sum_{t \in T(\boldsymbol{O}, g)} P(\boldsymbol{O}, q_t = i, l_t = g | \lambda')
$$

$$
\cdot \left(\log w_{ig} - \frac{n_g}{2} \log(2\pi) + \log |\boldsymbol{\tau}_{ig}| \right.
$$

$$-\frac{1}{2}||\boldsymbol{\tau}_{ig}(V(\boldsymbol{o}_t)-\boldsymbol{\mu}_{ig})||^2\Bigg) \qquad \text{(A·12)}$$

と書ける．ここで，$\{\pi_i, a_{ij}, w_{ig}, \boldsymbol{\mu}_{ig}, \boldsymbol{C}_{ig}\} \to \{\pi_i, a_{ij}, w_{ig}, \boldsymbol{\mu}_{ig}, \boldsymbol{\tau}_{ig}\}$ への変数変換は微分同相写像であり，臨界点を臨界点に写像する．式 (A·12) は π_i，a_{ij}，w_{ig}，$\boldsymbol{\mu}_{ig}$，$\boldsymbol{\tau}_{ig}$ について凸であり，したがって，大局的最大点は唯一の臨界点である．

（平成 11 年 7 月 12 日受付，12 月 7 日再受付）

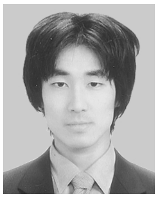


徳田　恵一　（正員）

昭 59 名工大・工・電子卒．平 1 東工大大学院博士課程了．同年東工大電気電子工学科助手．平 8 名工大知能情報システム学科助教授．工博．音声分析・合成・符号化・認識，ディジタル信号処理，マルチモーダルインタフェースの研究に従事．日本音響学会，情報処理学会，人工知能学会，IEEE 各会員．

益子　貴史　（正員）

平 5 東工大・工・情工卒．平 7 同大大学院博士前期課程了（知能科学専攻）．同年東工大精密工学研究所助手．現在東工大大学院総合理工学研究科物理情報システム創造専攻助手．音声分析・合成・認識，マルチモーダルインタフェースの研究に従事．日本音響学会，IEEE，ISCA 各会員．



宮崎　　昇

平 7 東工大・工・情工卒．平 7 同大大学院博士前期課程了（知能科学専攻）．現在，NTT コミュニケーション科学基礎研究所勤務．在学中，音声合成の研究に従事．日本音響学会会員．

小林　隆夫　（正員）

昭 52 東工大・工・電気卒．昭 57 同大大学院博士課程了．同年東工大精密工学研究所助手．同助教授を経て現在東工大大学院総合理工学研究科物理情報システム創造専攻教授．工博．ディジタルフィルタ，音声分析・合成・符号化・認識，マルチモーダルインタフェースの研究に従事．日本音響学会，IEEE，ISCA 各会員．